T4: Herleitungen Lagrange

Claudius Gräbner

November 27, 2020

1 Vorbemerkungen zu Lagrange

Die Lagrange-Methode ist in der Ökonomik beliebt um Optimierungsprobleme unter Nebenbedingungen zu lösen.

Das Vorgehen ist dabei immer folgendes:

1. Zu maximierende Funktion und einzuhaltende Nebenbedingungen aufschreiben.
2. Die Nebenbedingungen in die *kanonische Form* bringen, d.h. sie so umformen, dass auf einer Seite eine Null steht.
3. Die Lagrange-Funktion $\mathcal{L}$ aufstellen. Die Lagrange Funktion besteht aus der zu optimierenden Funktion und den substrahierten (oder addierten, das ist egal) kanonischen Nebenbedingungen, die alle mit einem Lagrange-Multiplikator λ_i multipliziert werden. Wir nennen den Teil mit den Nebenbedingungen die *Penalty Funktion* und den Teil mit der zu optimierenden Funktion die *Zielfunktion*.
4. Die *First-Order-Conditions* (FOC) herleiten. Das geschieht indem alle partiellen Ableitungen gebildet werden.
5. Die FOC nach den zu optimierenden Variablen auflösen. Dabei kann man sich zu Hilfe nehmen, dass die *Penalty Funktion* im Optimum immer gleich Null sein muss und alle partiellen Ableitungen ebenfalls Null sein müssen.[1]

Hier ein einfaches Beispiel aus der Produktionstheorie. Nehmen wir an wir wollen die Profitfunktion

$$\Pi = 10q - q^2 - 15 \tag{1}$$

unter der Nebenbedingung

[1] Korrekterweise müsstet ihr jetzt noch die Kuhn-Tucker-Bedungungen checken, aber bei unseren Problemen sind diese immer erfüllt. Genauere Erläuterungen findet ihr in allen einschlägigen Lehrbüchern.

$$q \geq 2 \tag{2}$$

maximieren.
Bringen wir die Nebenbedingung also zunächst in die kanonische Form:

$$2 - q \geq 0 \tag{3}$$

und formulieren nun die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L}(q, \lambda) = 10q - q^2 - 15 - \lambda(2 - q), \tag{4}$$

wobei es sich bei dem Teil $10q - q^2 - 15$ um die *Zielfunktion* und bei $\lambda(2 - q)$ um die *Penalty-Funktion* handelt. $\mathcal{L}(q, \lambda)$ leiten wir nun ab um die beiden FOC zu bekommen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \lambda)}{\partial q} = 10 - 2q - \lambda \tag{5}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(q, \lambda)}{\partial \lambda} = 2 - q \tag{6}$$

Aus der Bedingung, dass die beiden Ableitungen gleich Null sein müssen ergeben sich die Lösungen $q = 2$ und $\lambda = 6$. Der Profit Π ist im Optimum 1.

2 Das Zwei-Perioden Maximierungsproblem

An dieser Stelle soll das Zwei-Perioden-Maximierungsproblem Schritt für Schritt gelöst werden.

Zunächst formulieren wir die zu maximierende Zielfunktion. Dabei handelt es sich um die von uns gewählte Nutzenfunktion:

$$u(C_0, C_1) = \ln\left[C_0^{1-\beta} \cdot C_1^{\beta}\right] = (1 - \beta)\ln C_0 + \beta \ln C_1 \tag{7}$$

Die Nebenbedingungen waren:

$$C_0 + K_1 \leq (1 + r_0)K_0 \tag{8}$$

$$C_1 + K_2 \leq (1 + r_1)\left((1 + r_0)K_0) - C_0\right) \tag{9}$$

Diese sind in der kanonischen Form dann:

$$C_0 + K_1 - (1 + r_0)K_0 \leq 0 \tag{10}$$

$$C_1 + K_2 - (1 + r_1)\left((1 + r_0)K_0) - C_0\right) \leq 0 \tag{11}$$

Nun können wir die Lagrange-Funktion aufstellen:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} = &(1-\beta)\ln C_0 + \beta \ln C_1 - \\
&\lambda_1 \left(C_0 + K_1 - (1+r_0)K_0\right) - \lambda_2 \left(C_1 + K_2 - (1+r_1)\left((1+r_0)K_0) - C_0\right)\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

Nun brauchen wir die FOC, also die partiellen Ableitungen:

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_0} = \frac{1-\beta}{C_0} - \lambda_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{13}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = \frac{1}{C_1}\beta - \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \tag{14}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_1} = -\lambda_1 + \lambda_2 \left(1+r_1\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{15}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K_2} = -\lambda_2 \stackrel{!}{\geq} 0 \quad (\stackrel{!}{=} 0 \text{ wenn } K_2 \neq 0 \text{ wäre}) \tag{16}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = -C_0 - K_1 + \left(1+r_0\right) K_0 \stackrel{!}{=} 0 \tag{17}
$$

$$
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = -C_1 - K_2 + \left(1+r_1\right) K_1 \stackrel{!}{=} 0 \tag{18}
$$

Hier können wir gleich feststellen, dass $C_0 > 0$ und $C_1 > 0$, da die FOC sonst nicht definiert wären.

Um uns die Aufgabe etwas leichter zu machen setzen wir noch die *Penalty Funktion* innerhalb von Gleichung (12) gleich Null:

$$
\lambda_1 \left(C_0 + K_1 - (1+r_0)K_0\right) - \lambda_2 \left(C_1 + K_2 - (1+r_1)\left(((1+r_0)K_0) - C_0\right)\right) \stackrel{!}{=} 0
$$

Daraus können wir nämlich folgenden hilfreichen Ausdruck herleiten:

$$
\lambda_1 C_0 + \lambda_2 C_1 = K_1 \left(-\lambda_1 + \lambda_2 \left(1+r_1\right)\right) - \lambda_2 K_2 + \lambda_1 K_0 \left(1+r_0\right) \tag{19}
$$

Um auf Gleichung (19) zu kommen, muss man einfach die einzelnen Terme der Penalty-Funktion ausmultiplizieren und dann ein wenig umstellen.

Jetzt muss man ein wenig knobeln. Aus Gleichungen (13) und (13) ergibt sich jedenfalls:

$$
\lambda_1 C_0 \lambda_2 C_1 = 1 \tag{20}
$$

Das wiederum sagt uns schonmal, dass die rechte Seite von Gleichung (19) auch gleich 1 sein muss. Dass der erste Term auf der linken Seite gleich Null ist, ergibt sich aus Gleichung (15). Wenn wir das explizit aufschreiben haben wir:

$$
K_1 \left(-\lambda_1 + \lambda_2 \left(1+r_1\right)\right) = 0 \tag{21}
$$

Auch der nächste Term, $\lambda_2 K_2$, muss auf jeden Fall Null sein. Entweder wäre nämlich λ_2 wegen Gleichung (16) gleich Null, oder aber K_2. Hier ist letzteres der Fall, da wegen Gleichung (13) definitiv gilt, dass $\lambda_1 \neq 0$.

Aus dem bisher gesagten können wir nun ableiten, dass folgendes gelten muss:

$$\lambda_1 K_0 (1 + r_0) \overset{!}{=} 1 \tag{22}$$

denn ansonsten könnte Gleichung (19) unmöglich erfüllt sein.

Daraus können wir dann gleich den Wert für λ_1 ableiten:

$$\lambda_1 K_0 (1 + r_0) = 1 \tag{23}$$

$$\lambda_1 = \frac{1}{K_0 (1 + r_0)} \tag{24}$$

Jetzt ist es möglich λ_2 zu bestimmen. Aus Gleichung (21) ergibt sich nämlich:

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1 K_1}{K_1 (1 + r_0)} \tag{25}$$

Wir setzen nun Gleichung (24) ein:

$$\lambda_2 = \frac{\frac{1}{K_0(1+r_0)} K_1}{K_1 (1 + r_0)} \tag{26}$$

$$= \frac{\frac{K_1}{K_0(1+r_0)}}{K_1 (1 + r_0)} \tag{27}$$

Aus den Regeln für Doppelbrüche ergibt sich:

$$\lambda_2 = \frac{K_1}{(1 + r_0) K_0} \cdot \frac{1}{K_1 (1 + r_1)} \tag{28}$$

$$= \frac{K_1}{(1 + r_0)(1 + r_1) K_0 K_1}. \tag{29}$$

$$= \frac{1}{(1 + r_0)(1 + r_1) K_0} \tag{30}$$

Mit einer ähnlichen Strategie bekommen wir den Wert für C_0! Dazu starten wir mit der umgeformten Gleichung (13):

$$C_0 = \frac{1 - \beta}{\lambda_1} \tag{31}$$

Für λ_1 setzen wir nun den Term aus Gleichung (24) ein:

$$
\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1-\beta}{\lambda_1} && (32)\\
&= \frac{1-\beta}{\frac{1}{K_0(1+r_0)}} && (33)\\
&= (1-\beta)\,(1+r_0)\,K_0 && (34)
\end{aligned}
$$

Ganz ähnlich erhalten wir auch C_1. Denn hier gehen wir von Gleichung (14) aus und setzen für λ_2 den Wert aus Gleichung (30) ein:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \frac{\beta}{\lambda_2} && (35)\\
&= \frac{\beta}{\frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)K_0}} && (36)\\
&= \beta\,(1+r_0)\,(1+r_1)\,K_0 && (37)
\end{aligned}
$$

Der letzte fehlende Wert ist der für K_1. Wir wissen ja aus der Formulierung des Ausgangsproblems, dass

$$
\begin{aligned}
C_0 + K_1 &= (1+r_0)\,K_0 && (38)\\
K_1 &= (1+r_0)\,K_0 - C_0 && (39)
\end{aligned}
$$

Wir setzen für C_0 den Wert aus Gleichung (20) ein:

$$K_1 = (1+r_0)\,K_0 - (1-\beta)\,(1+r_0)\,K_0 \tag{40}$$

Das können wir jetzt bis zum gewünschten Ergebnis umformen:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= (1+r_0)\,K_0 - (1-\beta)\,(1+r_0)\,K_0 && (41)\\
&= K_0\,[(1+r_0) - (1-\beta)\,(1+r_0)] && (42)\\
&= K_0\,[(1+r_0)\,(1-(1-\beta))] && (43)\\
&= K_0\,(1+r_0)\,\beta && (44)
\end{aligned}
$$

Insgesamt haben wir nun das gesamte Nachfragesystem hergeleitet:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{K_0\,(1+r_0)} && \text{Gleichung (24)}\\
\lambda_2 &= (1+r_1)\,K_0 && \text{Gleichung (30)}\\
C_0 &= (1-\beta)\,(1+r_0)\,K_0 && \text{Gleichung (34)}\\
C_1 &= \beta\,(1+r_0)\,(1+r_1)\,K_0 && \text{Gleichung (37)}\\
K_1 &= K_0\,(1+r_0)\,\beta && \text{Gleichung (44)}
\end{aligned}
$$

Damit haben wir alle notwendigen Ausdrücke beisammen und die Ergebnisse von Slide 21 bestätigt!