T6: Herleitungen

Claudius Gräbner

9. Dezember 2020

1 Wachstumsraten von Brüchen (Slide 9)

Wir haben das Wachstum von $k = \frac{K}{N}$, also g_k, approximiert mit $g_K - n$, wobei g_K die Wachstumsrate von K und n die Wachstumsrate von N war. Warum funktioniert das?

Dem liegt der folgende allgemeine Ausdruck zugrunde:

$$\text{wenn } X = \frac{Y}{Z}, \text{ dann: } g(X) \approx g(Y) - g(Z) \tag{1}$$

wobei die Wachstumsraten $g(X) = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$, $g(Y) = \frac{Y_t - Y_{t-1}}{Y_{t-1}}$ und $g(Z) = \frac{Z_t - Z_{t-1}}{Z_{t-1}}$ als konstant angenommen werden. Ich verwende hier $g(X)$ anstatt von g_X nur zur besseren Lesbarkeit unten!

Zum besseren Verständnis wollen wir diese Approximation hier kurz herleiten. Aus der Definition einer Wachstumsrate als $g(X) = \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}}$ folgt:

$$\begin{aligned}
g(X) &= \frac{X_t - X_{t-1}}{X_{t-1}} \\
&= \frac{X_t}{X_{t-1}} - \frac{X_{t-1}}{X_{t-1}} \\
&= \frac{X_t}{X_{t-1}} - 1 \\
1 + g(X) &= \frac{X_t}{X_{t-1}} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Für $X = \frac{Y}{Z}$ bedeutet das:

$$
\begin{aligned}
1+g(X) &= \left(\frac{Y_{t+1}}{Z_{t+1}}\right) / \left(\frac{Y_t}{Z_t}\right) && (3)\\
&= \frac{Y_{t+1}}{Z_{t+1}} \cdot \frac{Z_t}{Y_t}\\
&= \frac{Y_{t+1} \cdot Z_t}{Z_{t+1} \cdot Y_t}\\
&= \frac{Y_{t+1}}{Y_t} \cdot \frac{Z_t}{Z_{t+1}}\\
&= \frac{Y_{t+1}}{Y_t} / \frac{Z_{t+1}}{Z_t} && (4)
\end{aligned}
$$

Nun logarithmieren wir beide Seiten:

$$
\begin{aligned}
\ln\left[1+g(X)\right] &= \ln\left[\frac{Y_{t+1}}{Y_t} / \frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right]\\
&= \ln\left[\frac{Y_{t+1}}{Y_t}\right] - \ln\left[\frac{Z_{t+1}}{Z_t}\right]\\
&= \ln\left[1+g(Y)\right] - \ln\left[1+g(Z)\right] && (5)
\end{aligned}
$$

Da gilt, dass $\ln(1+x) \approx x$ kommen wir auf das finale Ergebnis:

$$
\begin{aligned}
\ln\left[1+g(X)\right] &= \ln\left[1+g(Y)\right] - \ln\left[1+g(Z)\right]\\
g(X) &= g(Y) - g(Z) && (6)
\end{aligned}
$$

2 Herleitung der Gleichgewichtswerte im Solow Modell

Im Folgenden wollen wir aus der Gleichung

$$g_k \approx s\rho - \delta - n \tag{7}$$

die Gleichung für den Gleichgewichtswert der Kapitalintensität, k^*, herleiten:

$$k^* = \frac{s}{n+\delta} x^* \tag{8}$$

bzw. konkret für den Fall der Cobb-Douglas Produktionsfunktion:

$$k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{9}$$

$$\tag{10}$$

Der Steady State ist dadurch definiert, dass das Wachstum der Kapitalintensität gleich 0 ist:

$$g_k \stackrel{!}{=} 0 \tag{11}$$

Wenn wir das in Gleichung (7) einsetzen, erhalten wir:

$$0 \stackrel{!}{=} s\rho - \delta - n \tag{12}$$

Da $\rho = \frac{x}{k}$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} s\frac{x^*}{k^*} \\ \delta + n &= s\frac{x^*}{k^*} \\ k^* &= sx^* \\ k^* &= \frac{sx^*}{\delta + n} \end{aligned} \tag{13}$$

Da wir es im Solow Modell mit einer Cobb-Douglas Funktion zu tun haben, gilt:

$$x = Ak^{\alpha} \tag{14}$$

Wenn wir das in Gleichung (13) einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} k^* &= \frac{sA}{\delta + n} k^{*\alpha} \\ \frac{k^*}{k^{*\alpha}} &= \frac{sA}{\delta + n} \\ k^{*1-\alpha} &= \frac{sA}{\delta + n} \\ k^* &= \left(\frac{sA}{\delta + n}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \end{aligned} \tag{15}$$

Sobald wir k^* erst einmal hergeleitet haben, bekommen wir den Output im Steady State x^* einfach durch einsetzen von k^* in die Produktionsfunktion:

$$x^* = Ak^{*\alpha} \tag{16}$$