Advanced Macroeconomics
Kernelemente von Wachstumsmodellen

Termin 4

Claudius Gräbner

University of Duisburg-Essen
Institute for Socio-Economics &

Johannes Kepler University Linz
Institute for Comprehensive Analysis of the Economy (ICAE)

www.claudius-graebner.com | www.uni-due.de | www.jku.at/icae

UNIVERSITÄT DUISBURG ESSEN

Open-Minded

ifso institute for socio-economics

Outline

- Vorbemerkungen: Beschreibung vs. Erklärung und Schließung von Modellen
- Überblick über Elemente von Wachstumsmodellen
- Modelle für Produktion und die Social Accounting Matrix
- Modelle für den Arbeitsmarkt
- Modelle für Konsum- und Investitionsverhalten
- Zusammenfassung

Elemente von Wachstumsmodellen

- Wir betrachten zunächst Wachstumsmodelle mit den endogenen Variablen:
  - Wachstum des Kapitalstocks g_k, Profitrate v, Reallohn w und Konsum c
  - Wir brauchen also 4 Modellgleichungen
- Dazu werden folgende 3 Bereiche betrachtet:

Firmensektor
Entscheidungen über Produktion
- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor
Entscheidung über Sparen & Konsum
- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt
Entscheidung über Arbeit und Lohn
- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

Elemente von Wachstumsmodellen

- Wachstumsmodelle betrachten mindestens drei Bereiche
  - Die theoretischen Überlegungen führen zu mindestens vier Modellgleichungen

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

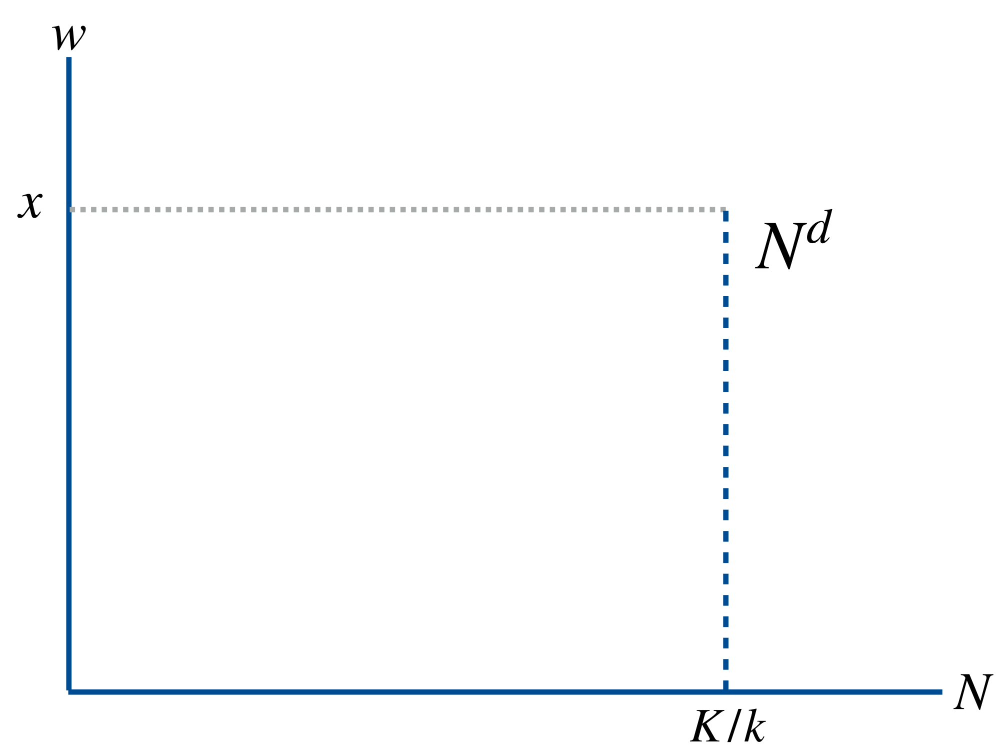
Der Arbeitsmarkt

Determinanten der Arbeitsnachfrage

- Gehen wir mal davon aus, dass die Produktionstechnik in unserem Produktionsmodell bereits gewählt wurde
- Woran bemisst sich nun die Nachfrage nach Arbeit?
  - Menge an vorhandenem Kapital K
  - Kapitalintensität (Kapital pro Arbeiter) k

$$\left.\begin{array}{l} K \\ k \end{array}\right\} \quad N^d = \frac{K}{k} = \frac{X}{x}$$

- Das macht macht die ganze Sache recht unspektakulär:

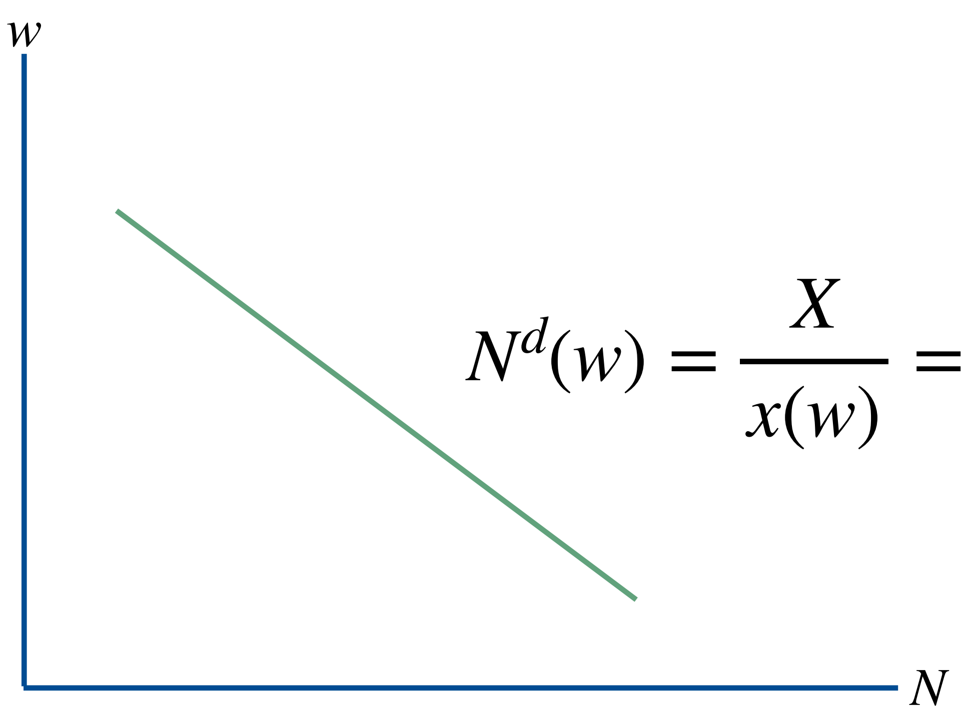


$$K/k = K/\frac{K}{N}$$

Der Arbeitsmarkt

Determinanten der Arbeitsnachfrage

- Was aber wenn es viele Produktionstechniken gibt?
  - Dann hängt die Nachfrage nach Arbeit von der Wahl der Produktionstechnik ab
  - Entrepreneure wählen die profitmaximierende Produktionstechnik aus
  - Bei höherem Lohn sind das kapitalintensivere Techniken → N^d sinkt



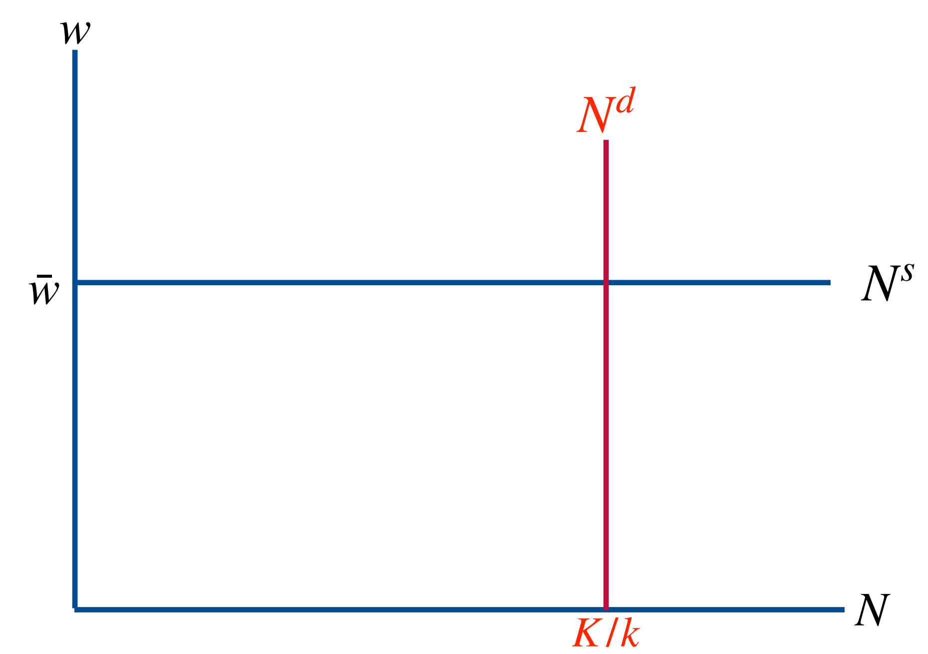
$$N^d(w) = \frac{X}{x(w)} = \frac{K}{k(w)}$$

- Die Beschreibung solcher Zusammenhänge ist über Paradigmen sehr unterschiedlich

Der Arbeitsmarkt

Das klassische *conventional wage model*

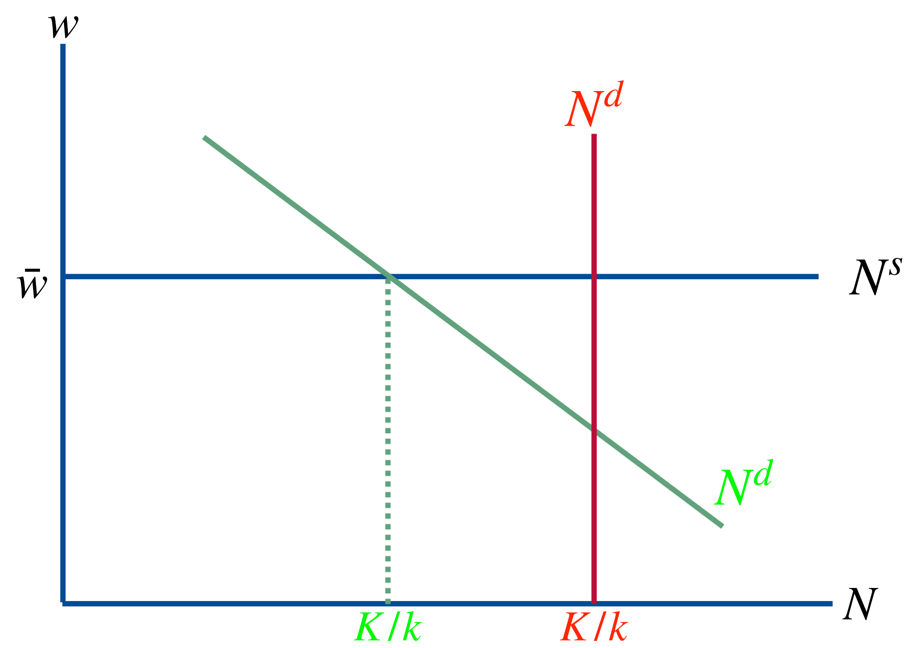
- In der ökonomischen Klassik nahm man den Reallohn in der Regel als exogen gegeben an → dieser bestimmt dann N^d und darüber auch N^s
  - Das Arbeitsangebot maßgeblich durch die Bevölkerungsgröße determiniert, welche wiederum vom Reallohn abhängig war
  - In der langen Frist: N^s gegeben durch Subsistenzlohn → T5 Wirtschaftsgeschichte
- Es gibt verschiedene klassische Begründungen warum das Arbeitsangebot horizontal durch den conventional wage gegeben ist und horizontal verläuft
  - Auch zentral im Lewis-Modell → T2 Wirtschaftsgeschichte
  - Bei nur einer Produktionstechnik bestimmt das CWM den Lohn und K bestimmt X und N



Der Arbeitsmarkt

Das klassische *conventional wage model*

- In der ökonomischen Klassik nahm man den Reallohn in der Regel als exogen gegeben an → dieser bestimmt dann N^d und darüber auch N^s
  - Das Arbeitsangebot maßgeblich durch die Bevölkerungsgröße determiniert, welche wiederum vom Reallohn abhängig war
  - In der langen Frist: N^s gegeben durch Subsistenzlohn → T5 Wirtschaftsgeschichte
- Es gibt verschiedene klassische Begründungen warum das Arbeitsangebot horizontal durch den conventional wage gegeben ist und horizontal verläuft
  - Auch zentral im Lewis-Modell → T2 Wirtschaftsgeschichte
  - Bei mehreren Produktionstechniken bestimmt es den Lohn und die profitmaximierende Produktionstechnik



Der Arbeitsmarkt

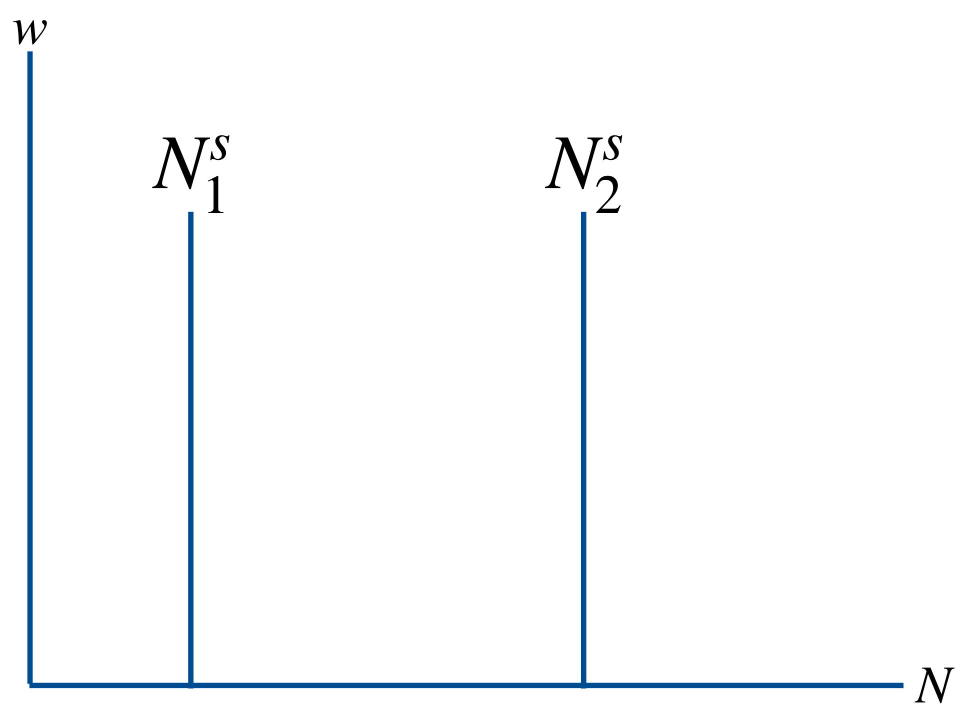
Das klassische *conventional wage model*

- In der ökonomischen Klassik nahm man den Reallohn in der Regel als exogen gegeben an → dieser bestimmt dann N^d und darüber auch N^s
  - Das Arbeitsangebot maßgeblich durch die Bevölkerungsgröße determiniert, welche wiederum vom Reallohn abhängig war
  - In der langen Frist: N^s gegeben durch Subsistenzlohn → T5 Wirtschaftsgeschichte
- Es gibt verschiedene klassische Begründungen warum das Arbeitsangebot horizontal durch den conventional wage gegeben ist und horizontal verläuft
- Das CVM bietet also eine neue Modellgleichung: $w = \bar{w}$
  - Der herkömmliche Reallohn $\bar{w}$ kommt dabei als exogene Variable hinzu
  - Daraus kann die Profitrate ableitet werden
  - Damit würde nur der Konsum c und das Wachstum des Kapitalstocks übrig bleiben → dieser wird dann über Sparen und Konsum im Haushaltssektor erklärt

Der Arbeitsmarkt

Das neoklassische *full employment model*

- In diesen Modellen ist es nicht der Reallohn, sondern das Arbeitsangebot, das exogen gegeben ist
- Haushalte bieten hier eine unelastische Menge an Arbeit an
  - Menge ändert sich nur als Reaktion auf (exogene) Änderung in der Bevölkerungsgröße:



- Damit es hier zu einem sinnvollen Gleichgewicht kommt muss N^d irgendwie gematched werden
- N^d hängt vom Kapitalstock ab
  - Wenn dieser mit der gleichen Rate n wächst wie die Bevölkerung passt es!

Der Arbeitsmarkt

Das neoklassische *full employment model*

- Eine mögliche zusätzliche Modellgleichung wäre also die Gleichsetzung des Wachstums vom Kapitalstock mit dem exogenen Bevölkerungswachstum:

$$\frac{N^d_{t+1}}{N^d_t} = \frac{K_{t+1}/k_{t+1}}{K_t/k_t} = \frac{N^s_{t+1}}{N^s_t} = 1 + n$$

- Im Gleichgewicht mit $k_{t+1} = k$ ergibt sich daraus:

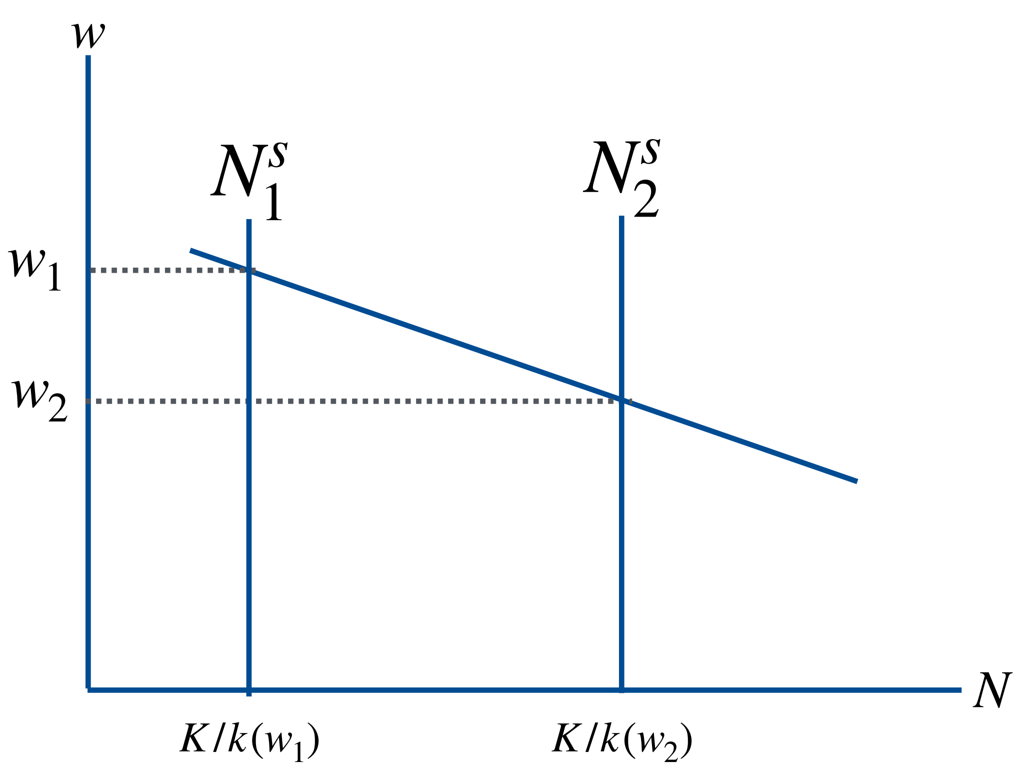
$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g_K = 1 + n$$

- Wobei n immer das exogen gegebene Bevölkerungswachstum ist
- Der Lohn ergibt sich hier dann über den Wachstums- und Verteilungsplan
- Was wenn wir die Wahl zwischen verschiedenen Produktionstechniken haben?

Der Arbeitsmarkt

Das neoklassische *full employment model*

- Bei Überangebot von Arbeit würde der Lohn sinken und die Entrepreneure zu weniger kapitalintensiven Produktionstechniken wechseln → $N^d \uparrow$
    - So wird Vollbeschäftigung endogen über die Wahl von T_t sichergestellt



- Da die Wahl von T_t mit der Wahl der Kapitalintensität einhergeht kann das Modell beschrieben werden als:

$$\frac{K}{k(w)} = \bar{N}$$

- Wobei $\bar{N}$ die exogen bestimmte Bevölkerungsgröße, bzw. Arbeitsangebot ist

Zusammenfassung Arbeitsmarkt

- Über die Betrachtung des Arbeitsmarktes bekommen wir eine weitere Modellgleichung für unser Wachstumsmodell
- Wir haben verschiedene Herangehensweisen an die Modellierung des Arbeitsmarkts kennen gelernt:

	Conventional wage model	Full employment model (ohne Technologiewahl)	Full employment model (mit Technologiewahl)
Exogene Variablen	$\bar{w}$	n	$\bar{N}$
Endogene Variablen	w	g_K	$k(w)$
Gleichung	$w = \bar{w}$	$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g_K = 1 + n$	$\frac{K}{k(w)} = \bar{N}$

- Für ein vollständiges Wachstumsmodell fehlt nur noch der Haushaltssektor

Drei Bereich und vier Gleichungen

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

Wiederholungsfragen

- Welche Entscheidungen werden auf dem Arbeitsmarkt getroffen?
- Welche drei Modelle vom Arbeitsmarkt haben wir kennen gelernt?
- Was sind die zentralen Annahmen, welche die drei Ansätze voneinander abgrenzen?
- Beschreiben Sie, wie in der kurzen Frist im FEM die Wahl der Produktionstechnik Vollbeschäftigung sicherstellt.
- Was ist die Modellgleichung des CWM?
- Was ist die Modellgleichung des FEM mit nur einer Produktionstechnik?
- Was ist die Modellgleichung des FEM mit vielen Produktionstechniken?

Elemente von Wachstumsmodellen

- Wachstumsmodelle betrachten mindestens drei Bereiche
  - Die theoretischen Überlegungen führen zu mindestens vier Modellgleichungen

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

Der Haushaltssektor
Die Entscheidung zwischen Sparen und Konsum

- Klassische Annahme: Arbeiterklasse konsumiert gesamtes Einkommen
  - Das machte sie in gewisser Weise auch zur Arbeiterklasse
  - Gilt aber nur aggregiert für die gesamte Klasse → einzelne Arbeiter:innen sparen schon
- Sparen ist damit ausschließlich Sache der Kapitalist:innen
  - Diese sehen einen Trade-Off: Konsum jetzt vs. Sparen und Konsum später
  - Das führt zu einem intertemporalen Enscheidungsproblem → Kern unserer Modelle
- Standardvorgehen: intertemporale Nutzenoptimierung
  - Problem: 'echte' Unsicherheit → Annahme, dass zukünftige Profitraten bekannt sind
  - Alternativen werden später behandelt, sind aber häufig Simulationsmodelle
- Wir nutzen das um die Lagrange-Methode zur Optimierung zu wiederholen:
  1. Lösung eines Optimierungsproblem mit der Lagrange Methode für zwei Zeitschritte
  2. Generalisierung zu n-Perioden-Fall → Herleitung der vierten Gleichung

Der Haushaltssektor
Entscheidungsproblem der Kapitalisten: Zwei-Perioden Beispiel

- Ein intuitives Beispiel, anhand dessen wir uns die technischen Grundlagen anschauen ist das folgende:
  - Ein:e Kapitalist:in lebt für zwei Zeitperioden
  - Der Nutzen wird über eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion repräsentiert
- Die Kapitalist:in startet mit einem Vermögen von K_0
- Die Netto-Profitrate in der ersten Periode ist r_0
- Daraus ergibt sich ihr Vermögen am Ende von Periode 1:

$$K_0 + r_0 K_0 = (1 + r_0) K_0$$

- Das kann nun konsumiert oder gespart werden

Der Haushaltssektor

Entscheidungsproblem der Kapitalisten: Zwei-Perioden Beispiel

$$\begin{tikzcd}
 & K_0 \arrow[d] & & \\
 & K_0 + r_0 K_0 = (1+r_0)K_0 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
C_0 & & K_1 \arrow[d] & \\
 & & K_1 + r_1 K_1 = (1+r_1)K_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
 & C_1 & & K_2
\end{tikzcd}$$

- K_2 würde hier für das Sparen für eine unbestimmte Zukunft stehen
- Es ergeben sich daraus die Budgetbeschränkungen:

$$C_0 + K_1 \leq (1+r_0)K_0$$
$$C_1 + K_2 \leq (1+r_1)K_1$$

  - Den zweiten Teil können wir ausformulieren:

$$C_1 + K_2 \leq (1+r_1)\Big(\big((1+r_0)K_0\big) - C_0\Big)$$

- Um zu sehen wie sie sich entscheidet spezifizieren wir eine Nutzenfunktion

Der Haushaltssektor
Entscheidungsproblem der Kapitalisten: Zwei-Perioden Beispiel

- Die Kapitalisten erfahren Nutzen nur aus unmittelbarem Konsum, nicht über das Sparen an sich

- Wir verwenden eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion um den Nutzen aus Konsum zu modellieren:

$$u\left(C_0, C_1\right) = \ln\left[C_0^{1-\beta} \cdot C_1^{\beta}\right] = \left(1-\beta\right)\ln C_0 + \beta \ln C_1$$

- Der Parameter β spielt die Rolle eines Diskont-Faktors, der die Gewichtung der Konsumzeitpunkte für den Gesamtnutzen bestimmt

Der Haushaltssektor

Entscheidungsproblem der Kapitalisten: Zwei-Perioden Beispiel

- Jetzt geht es darum, diese Nutzenfunktion zu maximieren
  - Und zwar unter Einhaltung der Budgetbeschränkung von vorher!

$$\max_{C_0, C_1 \geq 0} \left[(1-\beta) \ln C_0 + \beta \ln C_1 \right]$$

$$\text{s.t.} \quad C_0 + K_1 \leq (1 + r_0) K_0$$

$$C_1 + K_2 \leq (1 + r_1)\Big(\big((1 + r_0) K_0\big) - C_0 \Big)$$

Zu maximierender Ausdruck

Parameter, die man manipulieren kann

Einzuhaltende NB

- Die Lösung erhalten wir durch Anwendung der Lagrange-Methode
  - Gibt die zu manipulierenden Parameter als Funktion von gegebenen Werten an:

$$C_0 = (1 - \beta)\,(1 + r_0)\,K_0 \qquad K_1 = \beta\,(1 + r_0)\,K_0$$

$$C_1 = (1 + r_1)\,K_1 = \beta\,(1 + r_1)\,(1 + r_0)\,K_0$$

Hinweis zum Exkurs:
Wie wir Optimierungsprobleme mit der Lagrange Methode lösen

Nur relevant für alle, die Lagrange noch nicht kennen, oder es wiederholen wollen. In dem Handout wird die Lagrange-Methode kurz wiederholt und die Lösung für das Zwei-Perioden Optimierungsproblem hergeleitet.

Der Haushaltssektor
Entscheidungsproblem der Kapitalisten: n-Perioden Lösung

- In der Regel nehmen wir an, dass ökonomische Akteure ihren Nutzen über einen unendlich großen Zeithorizont maximieren
  - Historischer Ausgangspunkt: Ricardianische Äquivalenz
- Wir betrachten also unendlich viele Zeitschritte: $t = 0,1,2,3,...$
- Wir starten wieder mit K_0 und verwenden gleiche Budgetbeschränkungen:

$$
\begin{gathered}
C_0 + K_1 \leq (1 + r_0)K_0 \\
C_1 + K_2 \leq (1 + r_1)K_1 \\
\vdots \\
C_t + K_{t+1} \leq (1 + r_t)K_t \\
\vdots
\end{gathered}
$$

- Daraus ergibt sich eine Reihe von Konsumleveln, der Konsumpfad $\{C_t\}_{t=0}^{\infty}$

Der Haushaltssektor

Entscheidungsproblem der Kapitalisten: n-Perioden Lösung

- Wir maximieren nun den Nutzen wie vorher, nur eben über $\left\{C_t\right\}_{t=0}^{\infty}$:

$$u\left(C_0, C_1\right) = \left(1-\beta\right)\ln C_0 + \beta \ln C_1 \quad \Rightarrow \quad u\left(\left\{C_t\right\}_{t=0}^{\infty}\right) = \left(1-\beta\right)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln C_t$$

- Daraus ergibt sich dann folgendes Maximierungsproblem:

$$\max_{\left\{C_t \geq 0, K_{t+1} \geq 0\right\}_{t=0}^{\infty}} \left[\left(1-\beta\right)\sum_{t=0}^{\infty}\beta^t \ln C_t\right]$$

$$\text{s.t.} \quad C_t + K_{t+1} \leq (1+r_t)K_t \quad t = 0,1,\ldots$$

$$\text{given:} \quad K_0, \left\{r_t\right\}_{t=0}^{\infty}$$

Der Haushaltssektor

Entscheidungsproblem der Kapitalisten: n-Perioden Lösung

$$\max_{\{C_t \geq 0, K_{t+1} \geq 0\}_{t=0}^{\infty}} \left[(1-\beta) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln C_t \right]$$

s.t. $\quad C_t + K_{t+1} \leq (1 + r_t)K_t \quad t = 0,1,...$

given: $\quad K_0, \{r_t\}_{t=0}^{\infty}$

- Die Lösung erhalten wir wieder über die Lagrange-Methode:

$$C_t = (1-\beta)\left(1 + r_t\right) K_t$$

Kapitalist:innen konsumieren und sparen konstante Anteile ihres Vermögens

$$K_{t+1} = \beta \left(1 + r_t\right) K_t$$

Wachstum des Vermögens wird vollständig durch β und r_t bestimmt

$$\boxed{1 + g_{Kt} = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \beta \left(1 + r_t\right)}$$

→ Cambridge Gleichung

Der Haushaltssektor

Bezug zum einfachen neoklassischen Wachstumsansatz

- Das gerade behandelte Optimierungsproblem ist auch in vielen modernen neoklassischen Modellen enthalten
  - Ältere Modelle enthalten oft die die Annahme einer konstanten Spar-Investment-Beziehung:

$$I = s \cdot X$$

- Diese Formulierung kann leicht zu dem von uns verwendeten Modell in Bezug gesetzt und damit als Spezialfall identifiziert werden:

$$I_t = K_{t+1} - K_t + \delta K_t = \beta\left(1 + r_t\right) K_t - K_t + \delta K_t = K_t\Big(\beta\left(1 + r_t\right) - (1 - \delta)\Big)$$

$$= \frac{X}{\rho_t}\Big(\beta\left(1 + r_t\right) - \left(1 - \delta_t\right)\Big) = \frac{\Big(\beta v_t - \left(1 - \beta\right)\left(1 - \delta_t\right)\Big)}{\rho_t} X_t$$

Merkhilfe:

$$K_t = X_t / \rho$$

$$r = v - \delta$$

- Solange v, ρ und δ konstant bleiben, sind die Modelle identisch

Zusammenfassung Haushaltssektor

- Wir haben als letztes Puzzlestück den Haushaltssektor betrachtet
- Hier ging es um den Trade-Off zwischen Konsum und Sparen
- Die Arbeiterklasse konsumiert *per definitionem* alles - hier gibt es keinen TO
- Bei den Kapitalist:innen haben wir den Trade-Off als intertemporales Optimierungsproblem repräsentiert
- Wenn die Nutzenfunktion eine Cobb-Douglas-Form annimmt impliziert die Nutzenmaximierung der Kapitalist:innen, dass ein konstanter Teil des Vermögens gespart wird
    - Zumindest solange v, ρ und δ konstant bleiben
    - Dieser neoklassische Ansatz auch außerhalb des Paradigmas weit verbreitet
- Ergebnis ist die Cambridge Gleichung - das letzte fehlende Teil auf dem Weg zum kompletten Wachstumsmodell

Drei Bereiche und vier Gleichungen

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

Wiederholungsfragen

- Welche Akteure sparen im bisherigen Modell-Framework?
- Welchem Trade-Off sehen sich die Kapitalist:innen gegenüber?
- Schreibt jeweils die Budgetbeschränkungen im Entscheidungsproblem der Kapitalist:innen für zwei und n Perioden auf.
- Formuliert die Nutzenfunktion der Kapitalist:innen, die wir verwendet haben. Aus welchen ökonomischen Aktivitäten ziehen die Kapitalist:innen ihren Nutzen, aus welchen nicht?
- Wie verändert sich der Anteil am Gesamteinkommen der Kapitalist:innen für den Konsum über die Zeit wenn wir eine Cobb-Douglas-Nutzenfunktion verwenden?

Drei Bereiche und vier Gleichungen

$$w = x - vk \qquad c = x - \left(g_K + \delta\right) k$$

$$1 + g_{Kt} = \frac{K_{t+1}}{K_t} = \beta\left(1 + r_t\right)$$

Firmensektor

Entscheidungen über Produktion

- Firmen entscheiden was und wie viel sie produzieren

Haushaltssektor

Entscheidung über Sparen & Konsum

- Haushalte entscheiden wie viel sie konsumieren bzw. sparen

Arbeitsmarkt

Entscheidung über Arbeit und Lohn

- Haushalte entscheiden über Arbeitsangebot, Firmen über Lohn

$$w = \bar{w}$$

oder

$$\frac{K}{k(w)} = \bar{N}$$

oder

$$\frac{K_{t+1}}{K_t} = 1 + g_K = 1 + n$$

Abschließende Zusammenfassung

- Wachstumsmodelle bestehen aus endogenen und exogenen Variablen
- Variation in den endogenen Variablen wird erklärt
    - Für jede endogene Variable brauchen wir eine Modellgleichung, die einen wichtigen Mechanismus repräsentiert
- Daher bestehen Wachstumsmodelle mindestens aus drei Elementen:
    - Einem Produktionssektor, wo über Produktionstechniken und Output entschieden wird
    - Einem Haushaltssektor, in dem Haushalte sparen und konsumieren
    - Einem Arbeitsmarkt, in dem sich Arbeiter:innen und Firmen koordinieren
- Es gibt auch komplexere Modelle, die mehr endogene Variablen erklären
- Der Produktionssektor wird in verschiedenen Paradigmen ähnlich gehandhabt, bei den beiden anderen Bereichen gibt es große Unterschiede
    - Wobei unsere Betrachtung des Haushaltssektors ebenfalls recht neoklassisch ausfiel

Wiederholungsfragen

- Welche drei Bereiche der Ökonomie haben wir betrachtet? Was waren jeweils die zentralen Mechanismen, die wir modelliert haben?
- Was versteht man unter einer *Social Accounting Matrix*? Erläutern Sie anhand eines fiktiven Beispiels!
- Was versteht man unter der Schließung eines Modells? Was hat das mit der Anzahl endogener Variablen in einem Modell zu tun?
- Unter welchen Bedingungen führt das Modell des Sparverhaltens der Kapitalist:innen, das wir betrachtet haben, zu einer konstanten Sparquote?
- Was verstehen wir unter (a) einer Produktionstechnik, (b) einer Technologie und (c) technologischem Wandel?
- Was verstehen wir unter der Effizienzgrenze einer Technologie?